Problème

Soit f une fonction une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que si f admet un minimum local alors ce dernier est nécessairement global.

Notion de minimum local

Définition

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f admet un *minimum local* en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\forall x \in J \cap D_f, f(x) \geqslant f(x_0)$$

Dans ce cas, on dit que $m = f(x_0)$ est un *minimun local de f.*

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 3 \\ &= (x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(1)$. Donc f admet un minimum local en $x_0 = 1$.

Définition

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si

$$\forall x \in D_f, f(x) \geqslant f(x_0)$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(1)$. Donc f admet un minimum global en $x_0 = 1$.

Remarque

1. Un minimum global est un minimum local.
2. Le minimum global, lorsqu'il existe, est unique.
3. Un minimum (local ou global) peut être atteint en plusieurs points.

Théorème 1

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et x_0 un point de I.
Si f admet un minimum local en x_0, **alors** $f'(x_0) = 0$.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse en général. La fonction $x \longmapsto x^3$ est dérivable et sa dérivée s'annule en $x_0 = 0$, mais cette fonction n'admet pas de minimum local en 0.

Théorème 2

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et x_0 un point de I.
f admet un minimum local en x_0 **si et seulement si** ($f'(x_0) = 0$ et f'' est positive au voisinage de x_0).

Note

Dire que f'' est positive au voisinage de x_0 signifie qu'il existe un intervalle ouvert I_0 contenant x_0 tel que $\forall x \in I_0 \cap I, f''(x) \geqslant 0$).

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in I$, $f'(x) = 4x(x^2 + 3)$ et $f''(x) = 12(x^2 + 1)$.
$f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. De ce fait, on déduit du *théorème 2* que f admet un minimum local en 0.

Notion de convexité de fonctions

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda^2(x-y)^2+y^2+1+2\lambda(x-y)y$$

et

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=\lambda(x^2-y^2)+y^2+1$$

Ainsi

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$

Comme $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$ alors $\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geqslant 0$.
D'où $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.
Enfin,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Conclusion : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est convexe sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** f'' est positive sur $\mathbb{R}$.

Exemple
On considère la fonction f de l'exemple précédent. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x)=2$.
Comme f'' est positive sur $\mathbb{R}$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Retour au problème

Soit f une fonction une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
Démontrons que si f admet un minimum local alors ce dernier est nécessairement global.

Supposons que f admet un minimum local en un point x_0. Comme f admet un minimum local en x_0, alors il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que $\forall x \in J, f(x) \geqslant f(x_0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$.
On pose $E_x = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)x, \lambda \in]0,1[\}$. E_x est l'intervalle ouvert dont les bornes sont x_0 et x. $E_x \cap J \neq \emptyset$ car x_0 est un point adhérent à E_x et J est un voisinage de x_0.
Soit $a \in E_x \cap J$.
Comme $a \in J$, alors $f(a) \geqslant f(x_0)$.
Comme $a \in E_x$, alors $\exists \lambda_0 \in]0;1[$ tel que $a = \lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)x$.
Par convexité de f, on a:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0)x) \\ &\leqslant \lambda_0 f(x_0) + (1-\lambda_0) f(x) \\ f(a) &\leqslant \lambda_0 f(a) + (1-\lambda_0) f(x) \ (\ car \ f(x_0) \leqslant f(a) \ et \ \lambda_0 > 0 \ ) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f(x_0) \leqslant f(a) \ et \ f(a) \leqslant \lambda_0 f(a) + (1-\lambda_0) f(x) &\Longrightarrow f(x_0) \leqslant f(a) \ et \ (1-\lambda_0) f(a) \leqslant (1-\lambda_0) f(x) \\ &\Longrightarrow f(x_0) \leqslant f(a) \ et \ f(a) \leqslant f(x) \ (\ car \ 1-\lambda_0 > 0 \ ) \\ &\Longrightarrow f(x_0) \leqslant f(x) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x_0) \leqslant f(x)$$

Donc le minimum le local attent en x_0 est global.

Théorème

Ce théorème fournit une condition suffisante pour l'existence d'un minimum global.
Théorème

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant un minimum local en un point x_0.
si f est convexe sur $\mathbb{R}$ **alors** le minimum local atteint en x_0 est global.

LES MATHÉMATIQUES UNISSENT / MATHEMATICS UNITES

14 mars 2022, DELI ZRA ROLAND